**ATOM HIDROGEN**

**PERSAMAAN SCHROEDINGER RADIAL UNTUK ATOM HIDROGEN**

Persamaan Schroedinger radial:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R-\frac{2μ}{ℏ^{2}}\left[V\left(r\right)+\frac{l\left(l+1\right)ℏ^{2}}{2μr^{2}}\right]R+\frac{2μE}{ℏ^{2}}R=0$$ | (1) |

Energi Potensial atom Hidrogen:

|  |  |
| --- | --- |
| $$V\left(r\right)=-\frac{Ze^{2}}{r}$$ | (2) |

Persamaan Schroedinger radial:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R+\frac{2μ}{ℏ^{2}}\left[E+\frac{Ze^{2}}{r}-\frac{l\left(l+1\right)ℏ^{2}}{2μr^{2}}\right]R=0$$ | (3) |

Kita berkonsentrasi pada keadaan terikat (solusi dengan *E* <0 ).

Perubahan variabel:

|  |  |
| --- | --- |
| $$ρ=\left(\frac{8μ\left|E\right|}{ℏ^{2}}\right)^{{1}/{2}}r$$ | (4) |

Sehingga persamaan Schroedinger menjadi:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{d^{2}R}{dρ^{2}}+\frac{2}{ρ}\frac{dR}{dρ}-\frac{l\left(l+1\right)}{ρ^{2}}R+\left(\frac{λ}{ρ}-\frac{1}{4}\right)R=0$$ | (5) |
| $$λ=\frac{Ze^{2}}{ℏ}\left(\frac{μ}{2\left|E\right|}\right)^{{1}/{2}}=Zα\left(\frac{μc^{2}}{2\left|E\right|}\right)^{{1}/{2}}$$ | (6) |

**SPEKTRUM ENERGI**

Untuk *ρ* besar, persamaan (5) dapat disederhanakan menjadi:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{d^{2}R}{dρ^{2}}-\frac{1}{4}R≈0$$ | (7) |

Yang solusinya di tak hingga mempunyai bentuk:

|  |  |
| --- | --- |
| $$R\~e^{-{ρ}/{2}}$$ | (8) |

Dengan demikian solusi persamaan (5) dapat dituliskan sebagai:

|  |  |
| --- | --- |
| $$R=e^{-{ρ}/{2}}G\left(ρ\right)$$ | (9) |

Jika (9) disubstitusikan ke dalam (5) didapatkan:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{d^{2}G}{dρ^{2}}-\left(1-\frac{2}{ρ}\right)\frac{dG}{dρ}+\left[\frac{λ-1}{ρ}-\frac{l\left(l+1\right)}{ρ^{2}}\right]G=0$$ | (10) |

*G*(*ρ*) dapat dituliskan dalam bentuk deret pangkat:

|  |  |
| --- | --- |
| $$G\left(ρ\right)=ρ^{l}\sum\_{p=0}^{\infty }a\_{p}ρ^{p}$$ | (11) |

Relasi rekursi didapatkan dari persamaan diferensial yang dipenuhi oleh bentuk deret:

|  |  |
| --- | --- |
| $$H\left(ρ\right)=\sum\_{p=0}^{\infty }a\_{p}ρ^{p}$$ | (12) |

yaitu:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{d^{2}H}{dρ^{2}}+\left(\frac{2l+2}{ρ}-1\right)\frac{dH}{dρ}+\frac{λ-1-l}{ρ}H=0$$ | (13) |

Didapatkan:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\sum\_{p=0}^{\infty }\left[p\left(p-1\right)a\_{p}ρ^{p-2}+pa\_{p}ρ^{p-1}\left(\frac{2l+2}{ρ}-1\right)+\left(λ-1-l\right)a\_{p}ρ^{p-1}\right]=0$$ | (14) |

yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| $$\sum\_{p=0}^{\infty }\left\{\left(p+1\right)\left[pa\_{p+1}+\left(2l+2\right)a\_{p+1}\right]+\left(λ-1-l-p\right)a\_{p}\right\}ρ^{p-1}=0$$ | (15) |

sehingga didapatkan persamaan rekursi:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{a\_{p+1}}{a\_{p}}=\frac{p+l+1-λ}{\left(p+1\right)\left(p+2l+2\right)}$$ | (16) |

Untuk *p* besar berlaku:6

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{a\_{p+1}}{a\_{p}}≅\frac{1}{p}$$ | (17) |

Agar solusi yang didapatkan, *R*(*ρ*), “berkelakuan baik” di tak hingga, maka deret pada persamaan (10) harus berhenti pada suatu harga *p* tertentu katakanlah pada *p* = *nr*. Ini berarti dari persamaan (15) didapatkan:

|  |  |
| --- | --- |
| $$a\_{n\_{r}+1}=0 \rightarrow λ=n\_{r}+l+1$$ | (18) |

Perkenalkan bilangan kuantum utama:

|  |  |
| --- | --- |
| $$n=n\_{r}+l+1$$ | (19) |

Sesuai dengan fakta bahwa $n\_{r}\geq 0$, maka:

1. $n\_{r}\geq l+1$
2. *n* merupakan bilangan bulat
3. relasi $λ=n$ berimplikasi pada:

|  |  |
| --- | --- |
| $$E=-\frac{1}{2}μc^{2}\frac{\left(Zα\right)^{2}}{n^{2}}$$ | (20) |

yang sesuai dengan model Bohr.

**DEGENERASI**

Kita bisa tuliskan persamaan (15) dalam bentuk:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}=\frac{n-n\_{r}}{\left(n+1\right)\left(n+2l+2\right)}$$ | (21) |

Untuk *λ* = 1, yaitu keadaan dasar (ground state), diharuskan $n\_{r}=0, l=0$. Ini adalah keadaan tunggal (tidak berdegenerasi).

Untuk *λ* = 2, ada dua kemungkinan:

1. $n\_{r}=1, l=0$. Dalam hal ini $\frac{a\_{1}}{a\_{0}}=\frac{-1}{2}$ sehingga:

|  |  |
| --- | --- |
| $$H\left(ρ\right)=a\_{0}\left(1-\frac{ρ}{2}\right)$$ | (22) |

1. $n\_{r}=0, l=1$. Dalam hal inifungsi gelombang radial adalah konstan:

|  |  |
| --- | --- |
| $$H\left(ρ\right)=a\_{0}$$ | (23) |

Akan tetapi bagian angular dari fungsi gelombang melibatkan $Y\_{l,m}\left(θ,ϕ\right)$, sehingga ada $\left(2l+1\right)$ degenerasi.

Total degenerasi untuk *λ* = *n* = 2 adalah : 3 + 1 = 4 = 22.

Dapat ditunjukkan bahwa untuk *λ* = *n* , total degenerasi adalah: *n*2.

**FUNGSI EIGEN RADIAL**

Jika kita set *λ* = *n* dalam persamaan (15) sehingga:

|  |  |
| --- | --- |
| $$a\_{p+1}=\frac{p+l+1-n}{\left(p+1\right)\left(p+2l+2\right)}a\_{p}$$ | (24) |

kita dapatkan:

|  |  |
| --- | --- |
| $$a\_{p+1}=\left(-1\right)^{p+1}\frac{n-\left(p+l+1\right)}{\left(p+1\right)\left(p+2l+2\right)}∙\frac{n-\left(p+l\right)}{\left(p\right)\left(p+2l+1\right)} \cdots \frac{n-\left(l+1\right)}{\left(2l+2\right)}a\_{0}$$ | (25) |

Dengan demikian $H\left(ρ\right)$ merupakan “*associated Laguerre polynomials*” yang mempunyai bentuk:

|  |  |
| --- | --- |
| $$H\left(ρ\right)=L\_{n-l-1}^{\left(2l+1\right)}\left(ρ\right)$$ | (26) |

Dengan menggunakan:

|  |  |
| --- | --- |
| $$a\_{0}=\frac{ℏ}{μcα}a\_{p}$$ | (27) |

didapatkan $R\_{nl}\left(r\right)$:

|  |  |
| --- | --- |
| $$R\_{10}\left(r\right)=2\left(\frac{Z}{a\_{0}}\right)^{{3}/{2}}e^{{-Zr}/{a\_{0}}}\_{ }$$$$R\_{20}\left(r\right)=2\left(\frac{Z}{2a\_{0}}\right)^{{3}/{2}}\left(1-\frac{Zr}{2a\_{0}}\right)e^{{-Zr}/{2a\_{0}}}\_{ }$$$$R\_{21}\left(r\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a\_{0}}\right)^{{3}/{2}}\frac{Zr}{a\_{0}}e^{{-Zr}/{2a\_{0}}}\_{ }$$ | (27) |